



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/7396>

#### **To cite this version :**

Matthieu MERLE, Uwe EHRENSTEIN, Jean-Christophe ROBINET - Instabilités bi-et tridimensionnelles dans une couche limite décollée compressible subsonique - In: Congrès français de mécanique (21 ; 2013 ; Bordeaux (Gironde), France, 2013-08-26 - Congrès français de mécanique (21 ; 2013 ; Bordeaux (Gironde) - 2013

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# Instabilités bi- et tridimensionnelles dans une couche limite décollée compressible subsonique

M. MERLE<sup>a,b</sup>, U. EHRENSTEIN<sup>b</sup>, J-C. ROBINET<sup>a</sup>

a. Laboratoire DynFluid - Arts et Métiers ParisTech, 151 Boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris

b. IRPHE, UMR 7342 CNRS, Aix-Marseille Univ., F-13384 Marseille Cedex 13, France

## Résumé :

*La dynamique d'un écoulement décollé en régime subsonique est étudié. Il a été montré numériquement et expérimentalement pour ce type d'écoulement en régime incompressible, que la zone de recirculation est caractérisée par un phénomène basse-fréquence auto-entretenu. L'objectif sera ici d'étudier la sensibilité d'un tel écoulement vis-à-vis des effets de compressibilité. Pour cela l'étude de stabilité linéaire globale bi- et tridimensionnelle sera menée.*

*Ces résultats contribueront à la compréhension du phénomène de battement basse-fréquence observé expérimentalement et généralement rencontré dans des écoulements décollés en régime compressible subsonique.*

## Abstract :

*Flow separation is a common feature in wall-bounded flow, where it is generally induced by an adverse pressure gradient. Here we reconsider a bump-type geometry which has been used in previous numerical investigations of the stability of the laminar recirculation bubble for incompressible flow. It has been shown for low Reynolds number that the first bifurcation of the 2D stationary flow is characterized by a zero-frequency 3D instability mode. For larger Reynolds number a second bifurcation appears (Hopf bifurcation) and separated boundary-layer is then subject to a low frequency phenomenon known as 'flapping'. The influence of compressibility for this type of flow is assessed.*

*We first solve the compressible Navier-Stokes equations in order to obtain an equilibrium solution for increasing compressibility effects. Two-dimensional global stability of this solution is then investigated and we assess the influence of Mach number on the critical Reynolds number for which the separated flow becomes unstable with respect to oscillatory perturbations.*

*Three-dimensional transverse instabilities are addressed as well and in particular the evolution of growth rate and transverse wave length of the most unstable mode for several Mach numbers.*

**Mots clefs :** instabilités globales, écoulements compressibles, décollement

## 1 Introduction

La dynamique linéaire d'une couche limite laminaire décollée sur une bosse bidimensionnelle est étudiée numériquement. En régime incompressible, il a été mis en évidence expérimentalement et numériquement que la première bifurcation est une bifurcation fourche faisant passer d'un écoulement 2D stationnaire vers un écoulement 3D stationnaire ([2], [5]). Lorsque le nombre de Reynolds augmente la bifurcation devient une bifurcation de Hopf : la zone de recirculation est alors caractérisée par un phénomène de battement auto-entretenu de basse fréquence ([1]). L'objectif de ce travail est d'étudier les effets de compressibilité sur ces deux bifurcations.

Après avoir calculé la solution d'équilibre des équations de Navier-Stokes compressibles et caractérisé l'influence de la compressibilité sur le champ de base, la stabilité de cette solution par rapport à des

perturbations bidimensionnelles est étudiée. L'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Mach sera aussi étudiée.

L'étude des instabilités globales transverses sera ensuite menée pour différents nombres de Mach pour des solutions d'équilibre homogènes dans la direction transversale. Les évolutions du taux de croissance et de la longueur d'onde transverse du mode le plus instable en fonction du nombre de Mach sont étudiées ainsi que l'influence de la compressibilité sur la nature de la bifurcation 3D.

## 2 Formulation du problème

Les équations du mouvement considérées ici sont les équations de Navier-Stokes 3-D compressibles. Ces équations sont adimensionnées respectivement par l'épaisseur de déplacement  $\delta_0^*$ , de la couche limite imposée à l'entrée  $x_0 = 0$  du domaine de calcul, la vitesse extérieure  $U_\infty$ , la pression  $p_\infty$  et la température statique extérieure  $T_\infty$ . Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\frac{1}{\gamma M^2} \nabla p + \frac{1}{3Re} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) &= -(\gamma - 1) p (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2}{Re} \tau : \nabla \mathbf{u} + \frac{\gamma}{Re Pr} \nabla^2 T \end{aligned} \quad (1)$$

Le nombre de Reynolds et de Prandtl s'écrivent respectivement  $Re = \rho_\infty U_\infty \delta_0^* / \mu_\infty$ ,  $Pr = C_p \mu_\infty / \kappa_{c_\infty}$ . La viscosité dynamique  $\mu_\infty$  ainsi que la conductivité thermique  $\kappa_{c_\infty}$  sont supposées constantes par la suite. Ce système d'équation est fermée par la loi d'état des gaz parfaits  $p = \rho r T$ . Le système d'équations (1) peut formellement s'écrire sous la forme du système dynamique suivant :

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \quad (2)$$

où  $\mathbf{Q} = (u, v, T, \rho)$  est le vecteur d'état instantané.

### 2.1 Calcul du champ de base

Le champ de base, autour duquel l'analyse de stabilité linéaire est réalisée, est recherché comme une solution d'équilibre des équations de Navier-Stokes. La géométrie considérée est celle d'une bosse, homogène dans la direction transversale  $z$ , montée sur une plaque plane. Le champ de base peut donc être considéré comme étant bidimensionnel en accord avec les symétries du problème. Formellement, on recherche  $\mathbf{Q}_0(x, y)$  tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_0) = 0. \quad (3)$$

La figure (1) illustre la géométrie du système et le domaine de calcul. L'état de base est caractérisé par une zone de recirculation en aval de la bosse, dont la hauteur est 2 fois celle de l'épaisseur de la couche limite à l'entrée. La hauteur ( $y_n = 60\delta_0^*$ ) du domaine a été choisie de façon à récupérer un écoulement uniforme loin de la plaque.

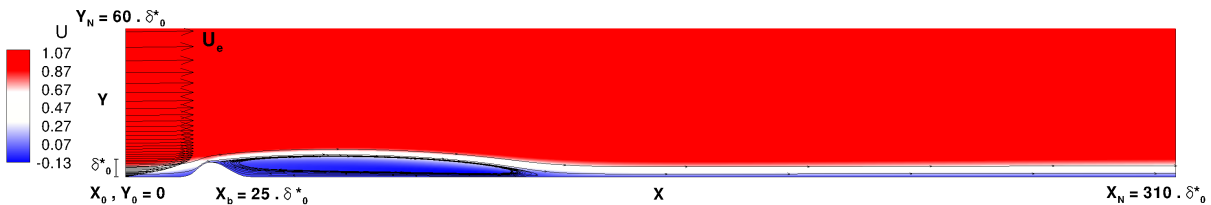


FIGURE 1 – Solution d'équilibre pour la vitesse longitudinale  $U_0(x, y)$  et pour  $M = 0.1$

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution des solutions d'équilibre sont les suivantes :

1. Entrée : Profil de couche limite solution des équations de similitude en régime compressible.
2. Plafond :  $u = \rho = T = 1$ ,  $\partial v / \partial y = 0$
3. Sortie :  $p = \rho T = 1$ ,  $\partial u / \partial x = \partial v / \partial x = \partial T / \partial x = 0$
4. Paroi :  $u = v = 0$ ,  $\partial T / \partial y = \partial \rho / \partial y = 0$

Afin de résoudre ce système, une méthode de collocation spectrale basée sur des polynômes de Chebyshev est utilisée pour la discrétisation du problème. Les solutions du système (3) sont alors obtenues par une méthode itérative de quasi-Newton ([3], [6]).

## 2.2 Calcul de stabilité globale

On suppose que le champ instantané  $\mathbf{Q}(x, y, z, t)$  peut se décomposer comme la somme d'un champ de base  $\mathbf{Q}_0(x, y)$  et d'un champ perturbé  $\hat{\mathbf{Q}}(x, y, z, t)$ , de composantes  $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{\rho})$  pour des perturbations 3D, avec  $\epsilon$  une amplitude infinitésimale :

$$\mathbf{Q}(x, y, z, t) = \mathbf{Q}_0(x, y) + \epsilon \hat{\mathbf{Q}}(x, y, z, t) \quad \text{où} \quad \|\mathbf{Q}_0\| \gg \|\epsilon \hat{\mathbf{Q}}\|. \quad (4)$$

En injectant la relation (4) dans (2) et en linéarisant autour du champ de base, on obtient les équations d'évolution pour la perturbation

$$\mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_0) \hat{\mathbf{Q}} + \mathcal{O}(\|\hat{\mathbf{Q}}^2\|) \quad (5)$$

où  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}(\mathbf{Q}_0)$  est l'opérateur jacobien. On cherche ensuite les solutions sous la forme

$$\hat{\mathbf{Q}}(x, y, z, t) = \mathbf{Q}'(x, y; \omega, \beta) e^{i(\beta z - \omega t)} + c.c. \quad (6)$$

où  $\beta \in \mathbb{R}$ , et  $\omega \in \mathbb{C}$ . Le système d'équations (5) devient sous cette hypothèse :

$$(\mathbf{A} - i\omega \mathbf{B}) \mathbf{Q}'(x, y; \omega, \beta) = 0 \quad (7)$$

Le système d'équation (7) représente ainsi un problème aux valeurs propres généralisé où  $\omega$  est la valeur propre et  $\mathbf{Q}'(x, y; \omega, \beta)$  le vecteur propre associé. Ce problème aux valeurs propres est fermé par des conditions aux limites compatibles avec celles utilisées pour le champ de base.

Le système (7) étant de taille importante ( $\dim(\mathbf{A}) = (5 \times N_x \times N_y)^2$ ) pour des perturbations 3D, un algorithme d'Arnoldi est utilisé pour le calcul de la partie significative du spectre des valeurs propres.

## 3 Résultats

### 3.1 Analyse du champ de base

La géométrie de type bosse bidimensionnelle et les dimensions du domaine considérées sont données sur la figure 1. La grille utilisée pour discrétiser le problème possède  $(N_x, N_y) = (300, 60)$  points de collocation spectrale Chebyshev respectivement dans la direction longitudinale et selon la direction normale à la paroi. Des transformations de coordonnées sont utilisées pour passer d'un domaine  $[-1; +1]^2$  à un domaine  $[0; X_n] \times [0; Y_n]$ . Les iso-valeurs de vitesse longitudinale  $U_0$  du champ de base, pour un nombre de Reynolds  $Re = 600$  et une hauteur de bosse  $h = 2\delta_0^*$  sont représentées sur la figure 2(a) et 2(b). L'évolution de la longueur de la zone de recirculation,  $L_{sep}$ , présentée sur la figure 3, montre les effets de compressibilité sur la solution d'équilibre. L'évolution de cette grandeur est non-linéaire, montrant une influence progressive des effets de compressibilité sur le champ de base au fur et à mesure que le nombre de Mach augmente. Une telle augmentation de la zone de recirculation avec la compressibilité a également été observée pour des écoulements d'arrière-corps [4].

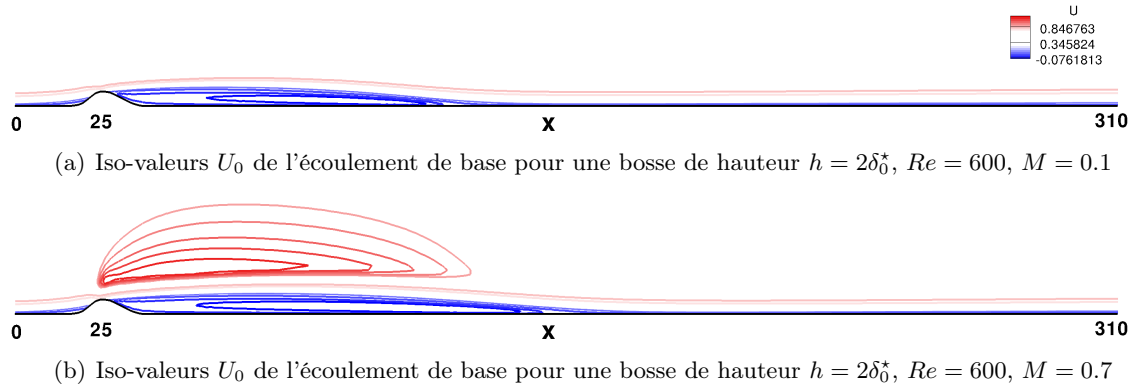
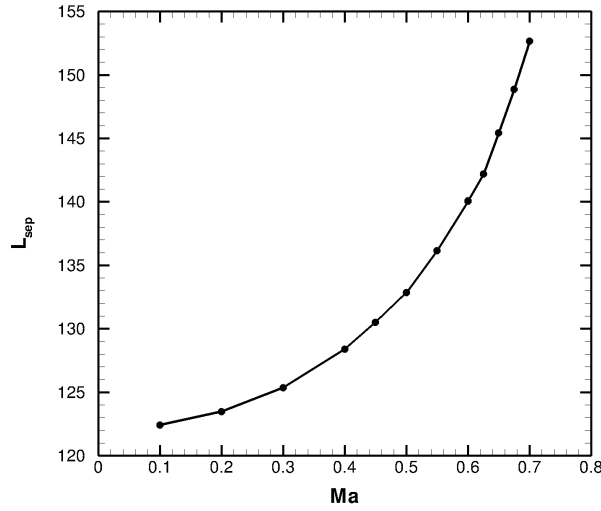
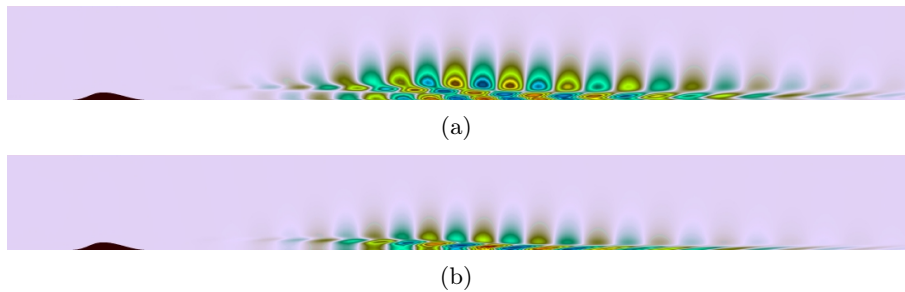


FIGURE 2 –

FIGURE 3 – Evolution de la longueur de recirculation  $L_{sep}$  en fonction du nombre de Mach

### 3.2 Etude de la stabilité globale bidimensionnelle

La stabilité globale de la solution d'équilibre introduite précédemment est étudiée. La figure 5 a), représente les diagrammes de stabilité globale pour différents nombres de Mach à  $Re = 600$ . Le taux d'amplification du mode globale le plus instable ( $\omega_r \sim 0.25$ ) augmente pour  $M \geq 0.5$  ce qui semble directement lié à l'allongement de la zone de recirculation avec le nombre de Mach observé pour l'écoulement de base (cf. figure 3). L'évolution du nombre de Reynolds critique pour l'apparition d'une instabilité 2D

FIGURE 4 – a) Composante longitudinale  $u'$  et b) Masse volumique  $\rho'$  associé au mode globale le plus instable pour  $Re = 600$  et  $M = 0.7$

est également étudiée.

En régime incompressible il a été montré que pour ce type de géométrie, le nombre de Reynolds critique se situe autour de  $Re_c \sim 550$  ([1]) or, on remarque sur la figure 5 b) qu'à  $M = 0.7$ , le nombre de Reynolds critique devient  $Re_c = 320$  et la compressibilité a donc clairement un effet déstabilisant. En régime incompressible, il a été observé, que la première bifurcation en termes de nombre de Reynolds pour cet écoulement est une bifurcation de type fourche, faisant passer un écoulement 2D stationnaire vers un écoulement 3D stationnaire ([2], [5]) et nous abordons maintenant l'évolution de la nature cette bifurcation vis-à-vis des effets de compressibilité.

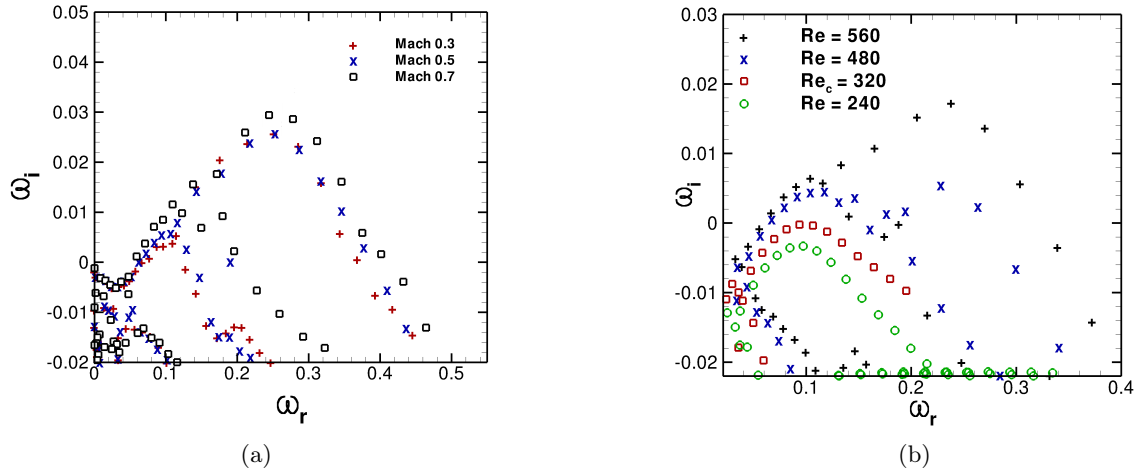


FIGURE 5 – Diagramme de stabilité globale pour a)  $Re = 600$  et  $M = 0.3, 0.5, 0.7$ ; b)  $M = 0.7$  en fonction du nombre de Reynolds

### 3.3 Etude de la stabilité globale tridimensionnelle

L'étude de la stabilité tridimensionnelle d'un écoulement incompressible a permis de mettre en évidence l'existence d'un mode globale stationnaire localisé dans la zone de recirculation ([2]). Il a été montré par une étude de stabilité linéaire et par simulation directe qu'il existait un nombre d'onde transverse  $\beta_{max} = 0.25$  pour lequel le taux d'amplification du mode le plus instable  $\omega_i$  est maximal.

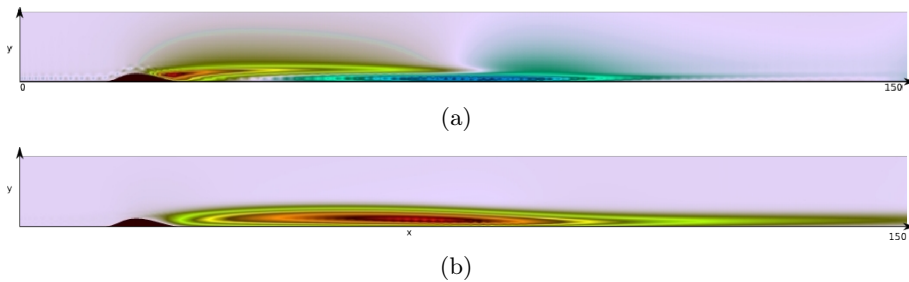


FIGURE 6 – a) Composante longitudinale  $u'$  et b) Composante transverse  $w'$  du mode globale le plus instable pour  $Re = 400$  et  $M = 0.4$  correspondant à  $\beta = 0.2$

Nous utiliserons  $(N_x, N_y) = (200, 60)$  points de maillage et un domaine  $(X_N \delta_0^*, Y_N \delta_0^*) = (205, 60)$ . La figure 7 présente l'évolution du taux d'amplification du mode le plus instable en fonction du nombre d'onde transverse  $\beta$  et du nombre de Mach. Les solutions obtenues en régime incompressible par l'étude de stabilité linéaire et par simulation directe ont également été représentées. On montre alors pour un

nombre de Reynolds  $Re = 400$ , que le taux d'amplification du mode stationnaire diminue légèrement avec le nombre de Mach et on observe également un effet de la compressibilité sur le nombre d'onde transverse  $\beta_{max}$ . La figure 6 représente la structure du mode le plus instable à  $M = 0.4$ .

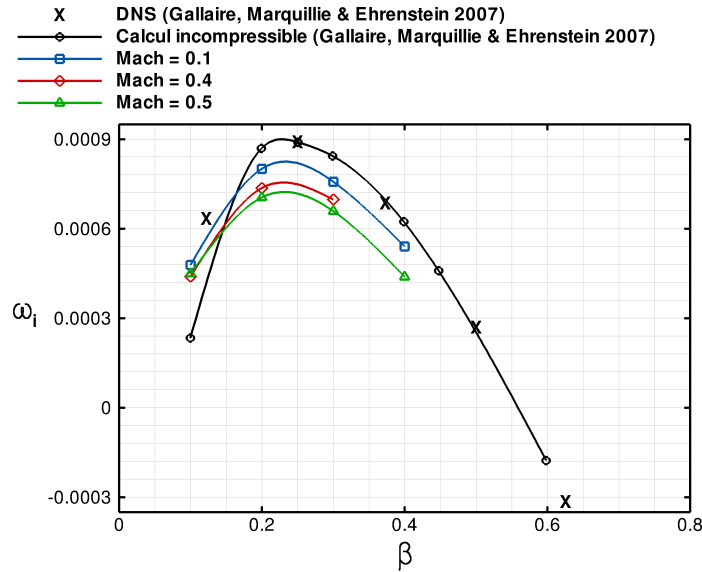


FIGURE 7 – Taux d'amplification du mode globale le plus instable en fonction du nombre d'onde transverse  $\beta$  et du nombre de Mach  $M$ , ( $Re = 400$ )

## 4 Conclusions

La stabilité globale bi- et tridimensionnelle d'un écoulement décollé en régime subsonique a été étudiée. Les perturbations bidimensionnelles globales de type Kelvin-Helmholtz, dont la superposition donne lieu au battement basse fréquence, typique des couches limites décollées, en régime incompressible [5], apparaissent comme étant particulièrement sensibles aux effets de compressibilité. Ainsi, le nombre de Reynolds critique pour ces perturbations est diminué de 40 % pour un nombre de Mach de 0.7, en comparaison avec le régime incompressible. Ce comportement semble directement lié à l'augmentation avec le nombre de Mach de la longueur de la zone de recirculation. À l'inverse, pour des perturbations globales tridimensionnelles, une diminution du taux d'amplification du mode stationnaire le plus instable est observée lorsque la compressibilité augmente, ce qui a également pour effet d'augmenter la longueur d'onde transverse de la perturbation.

## Références

- [1] Ehrenstein, U. & Gallaire, F. 2008 Two-dimensional global low-frequency oscillations in a separating boundary-layer flow *J. Fluid Mech.* Vol. 614, pp. 315-327.
- [2] Gallaire, F., Marquillie, M. & Ehrenstein, U. 2007 Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary layers *J. Fluid Mech.* Vol. 571, pp. 221-233.
- [3] Golub, G.H. & VanLoan, C.F. 1989 *Matrix Computations* 2<sup>nd</sup> ed., Baltimore : Johns Hopkins University Press.
- [4] Meliga, P., Sipp, D. & Chomaz, J.-M. 2010 Effect of compressibility on the global stability of axisymmetric wake flows *J. Fluid Mech.* Vol. 660, pp. 499-526.
- [5] Passaggia, P.-Y., Lewke, T. & Ehrenstein, U. 2012 Transverse instability and low-frequency flapping in incompressible separated boundary layer flows : an experimental study *J. Fluid Mech.* Vol. 703, pp. 363-373.
- [6] *Numerical RECIPES IN FORTRAN 90 : THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING* , Cambridge University Press, Third Edition, 1996